ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦАЛОМ В КРУГЕ*

Базаргельды Худайгулыев,
Старший преподаватель кафедры высшей математики
Туркменского государственного института финансов,
кандидат физико-математических наук

Аннотация

В статье изучается поведение неотрицательных обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярным потенциалом в окрестности изолированной особой точки в единичном круге с центром в начале координат. Относительно потенциальной функции в уравнении устанавливаются точные условия существования и отсутствия неотрицательных обобщенных решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, сингулярный потенциал, неотрицательное решение, точное условие.

В статье рассматривается задача нахождения неотрицательных решений $u(x)$ задачи Дирихле

$$-\Delta u = V(x)u\,, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial B} = \phi(x)\,, \tag{2}$$

в круге $B = B(0,R) \subset R^2$ радиуса R, $R \le 1$, с центром в начале координат, где $x = (x_1, x_2)$, ∂B – граница круга B (т.е. окружность) и

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \text{ – оператор Лапласа.}$$

Под решением уравнения (1) понимается обобщенная функция $u \in D^/(B)$, удовлетворяющая условиям $u(x) \ge 0$, $Vu \in L^1_{loc}(B)$.

Предполагается, что $0 \le^{\cdot} V \in L^1_{loc}(B)$, т.е. локально интегрируемая неотрицательная функция и $\phi(x) \ge 0$ – заданная неотрицательная непрерывная на границе ∂B функция. Здесь $L^1_{loc}(B)-$ пространство локально интегрируемых в круге B функций, $L_1(B)-$ пространство интегрируемых в круге B функций. Через $D^/(B)$ обозначается пространство обобщенных функций.

Задача (1), (2) впервые изучается в работе (Худайгулыев, 2010) в единичном круге с центром в начале координат. В этой работе доказывается, что если $0 \le V(x) \le V_0(x) = \dfrac{c}{|x|^2}$ и $0 \le c \le C_* = \dfrac{(n-2)^2}{4}$, то задача (1), (2) имеет неотрицательное обобщенное решение; если же $c > C_*$ и $V(x) \ge V_0(x)$, то рассматриваемая задача не имеет неотрицательных обобщенных решений. Такие результаты для области с конической точкой были получены в работе (Hudaykuliev, 2012).

В полярных координатах $x_1 = r\cos\omega$, $x_2 = r\sin\omega$ the оператор Лапласа для радиальной функции имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot$$

* Худайгулыев Б. e-mail: bazargeldyh@yandex.ru

Пусть $B=\{x\in\Re^2: \ |x|<1\}$ · – единичный круг с центром в начале координат и $\varphi(x)=\left|\ln|x|\right|^{\alpha/2}$. Найдем функцию $V_0(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\varphi+V_0(x)\varphi=0$$

в пространстве $D^{/}(B)$. Переходя к полярным координатам (r,ω), для радиальной функции $\varphi(x)$, получаем

$$-\Delta\varphi=\frac{\alpha(2-\alpha)}{4|x|^2\ln^2|x|}\varphi .$$

Пусть

$$V_0(x)=\frac{c}{|x|^2\ln^2|x|},\ x\in B,$$

где число c определяется из равенства $c=\alpha(2-\alpha)$.

Заметим, что при $0\le c\le 1$ число α определяется из равенства $\alpha=1-\sqrt{1-c}$ и при $0<\alpha\le 1$ выполняется условие $\Delta\phi\in L^1_{loc}(B)$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $0\le V(x)\in L^1_{loc}(B)$. Если $0\le c\le 1$ и в круге выполняется неравенство $V(x)\le V_0(x)$, то задача (1), (2) имеет неотрицательное решение для любой неотрицательной непрерывной граничной функции ϕ.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$P_m \qquad \begin{cases}-\Delta u_m=V_m(x)u_m;\\ \left.u_m\right|_{\partial B}=\phi_m(x).\end{cases}$$

где $m=1,2,\dots$, $0\le V_m\le V$ и $\{V_m\}$ – последовательность монотонно неубывающих ограниченных и измеримых функций, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{m\to\infty}V_m=V$ для почти всех $x\in B$, $0\le\varphi_m\le\varphi$ и $\{\phi_m\}\subset C^1(\overline{B})$ – последовательность неотрицательных монотонно неубывающих непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к заданной неотрицательной непрерывной на границе ∂B функции ϕ.

Из классической теории линейных эллиптических уравнений (О.А.Ладыженская, Уральцева и др., 1967) следует, что задача (P_m) имеет единственное неотрицательное решение. Это решение для почти всех $x\in B$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_m(x)=\int\limits_{\partial B}K(x,y)\phi(y)dS_y+\int\limits_B G(x,y)V_m(y)u_m(y)dy$$

где $K(x,y)$ – ядро Пуассона и $G(x,y)$ – функция Грина задачи $-\Delta u=0$, $\left.u\right|_{\partial B}=0$, причем в круге B выполняется $K(x,y)\ge 0$ и $G(x,y)\ge 0$. Последовательность $\{u_m\}$ не убывает по m.

Рассмотрим вспомогательную задачу (P_m). Покажем, что предел последовательности $\{u_m\}$ задачи (P_m) является решением задачи (1), (2). Умножим уравнение из (P_m) на $u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2$, $p\ge 2$ и проинтегрируем по кругу B:

$$-\int\limits_B\Delta u_m u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2dx=\int\limits_B V_m(x)u_m u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2dx,$$

где $\psi=\psi(x)$ – тест функция для круга B.

Введя обозначение $k_m=u_m/\varphi$ и проведя вычисления, получим следующее неравенство:

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int\limits_B\left|\nabla(k_m^{p/2})\right|^2\varphi^2\psi^2dx+\int\limits_B k_m^p\varphi(-\Delta\varphi)\psi^2dx+$$

$$+2\int\limits_B\nabla k_m k_m^{p-1}\varphi^2\psi\nabla\psi\,dx=\int\limits_B V_m(x)k_m^p\varphi^2\psi^2dx.$$

Так как по предположению $-\Delta\varphi\cdot\varphi = V_0\varphi^2 \ge V_m\varphi^2$ из последнего равенства вытекает неравенство

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int_B \left|\nabla(k_m^{p/2})\right|^2 \varphi^2\psi^2 dx \le 2\left|\int_B \nabla k_m\cdot k_m^{p-1}\varphi^2\psi\nabla\psi\,dx\right|. \qquad (3)$$

Для оценки интеграла правой части неравенства (3) используем неравенство Коши

$$\left|\int_B \nabla k_m\cdot k_m^{p-1}\varphi^2\psi\nabla\psi\,dx\right| \le \frac{1}{p^2}\int_B \left|\nabla(k_m^{p/2})\right|^2 \varphi^2\psi^2 dx + \int_B k_m^p\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 dx.$$

Поэтому неравенство (3) можно записать в виде:

$$\int_B \left|\nabla(k_m^{p/2})\right|^2 \varphi^2\psi^2 dx \le \frac{p^2}{2p-3}\int_B k_m^p\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 dx. \qquad (4)$$

Пусть $B_r = B(0,r)\subset\subset B$. Выберем функцию $\psi(x)$ следующим образом: $0\le\psi(x)\le 1$, $\psi=1$ при $x\in B_{r-\delta}$ ($\delta>0$) и $\psi=0$ при $x\in B\setminus B_r$. Предположим, что $\left|\nabla\psi\right|^2 \le C_1\delta^{-2}$. Тогда неравенство (4) примет вид

$$\int_{B_{r-\delta}} \left|\nabla(k_m^{p/2})\right|^2 \varphi^2 dx \le \frac{C_1\delta^{-2}p^2}{2p-3}\int_{B_r} k_m^p\varphi^2 dx. \qquad (5)$$

Теперь докажем следующее неравенство.

Лемма. Пусть $0<r<1$ и пусть функция $h(s)$ непрерывно дифференфируема на отрезке $[0,r]$. Тогда при $q>2$ выполняется неравенство

$$\left(\int_0^r \left|h(s)\right|^q s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{2/q} \le K\int_0^r \left(\left|h^/(s)\right| + h^2(s)\right)s\left|\ln s\right|^\alpha ds \qquad (6)$$

где $K = const > 0$, число α определяется из равенства $\alpha(2-\alpha)=c$ ($0<\alpha\le 1$).

Доказательство леммы. Сначала докажем следующее неравенство: если $0<r<1$ и функция $h(s)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,r]$ и $h(r)=0$, то при $q>2$ справедливо неравенство

$$\left(\int_0^r \left|h(s)\right|^q s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{2/q} \le K_0\int_0^r \left|h^/(s)\right|^2 s\left|\ln s\right|^\alpha ds \qquad (7)$$

где $K_0 = const > 0$.

Интегрируя по частям и используя неравенство Гельдера, получим

$$\int_0^r h^q(s)s\left|\ln s\right|^\alpha ds = -\frac{q}{2}\int_0^r h^{q-1}h^/(s)\left(s^2\left|\ln s\right|^\alpha - \alpha\int_0^s \tau\left|\ln\tau\right|^{\alpha-1}d\tau\right)ds \le$$

$$\le q\int_0^r h^{q-1}(s)h^/(s)s^2\left|\ln s\right|^\alpha ds \le$$

$$\le q\left(\int_0^r h^{2(q-1)}(s)s^3\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{1/2}\left(\int_0^r h^{/2}(s)s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le q\cdot\sup_{[0,r]}\{s^2h^{q-2}(s)\}^{1/2}\left(\int_0^r h^q(s)s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{1/2}\left(\int_0^r h^{/2}(s)s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{1/2}.$$

Покажем, что

$$\sup_{[0,r]}\left\{s^2h^{q-2}(s)\right\} \le K_1\left(\int_0^r h^{/2}(s)s\left|\ln s\right|^\alpha ds\right)^{(q-2)/2}$$

Имеем

$$\sup_{s\in[0,r]}\left\{s^{2/(q-2)}h(s)\right\}=\sup_{s\in[0,r]}\{s^{2/(q-2)}(h(s)-h(r))\}=\sup_{s\in[0,r]}s^{2/(q-2)}\left\{-\int_s^r h^{/}(\tau)d\tau\right\}\leq$$

$$\leq\sup_{s\in[0,r]}s^{2/(q-2)}\left(\int_s^r h^{/2}(\tau)\tau\left|\ln\tau\right|^{\alpha}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^r \tau^{-1}\left|\ln\tau\right|^{-\alpha}d\tau\right)^{1/2}\leq\sup_{s\in[0,r]}M(s)\left(\int_s^r h^{/2}(\tau)\tau\left|\ln\tau\right|^{\alpha}d\tau\right)^{1/2}.$$

Здесь

$$M(s)=s^{2/(q-2)}\left(\int_s^r \tau^{-1}\left|\ln\tau\right|^{-\alpha}d\tau\right)^{1/2}=s^{2/(q-2)}\cdot\left(\frac{(\ln r)^{1-\alpha}-(\ln s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2}.$$

При $\alpha\to 1-0$ по правилу Лопиталя получим

$$\lim_{\alpha\to1-0}\frac{(\ln s)^{1-\alpha}-(\ln r)^{1-\alpha}}{\alpha-1}=\lim_{\alpha\to1-0}[(\ln r)^{1-\alpha}\ln(\ln r)-(\ln s)^{1-\alpha}\ln(\ln s)]=\ln\frac{\ln r}{\ln s}\cdot$$

Следовательно, найдется число $K_1>0$ sтакое, что выполняется неравенство $\sup_{s\in\{0,r\}}\left\{M(s)\right\}\leq K_1$. Поэтому

$$\sup_{s\in[0,r]}\{s^{2/(q-2)}h(s)\}\leq K_1\left(\int_s^r h^{/2}(\tau)\tau\left|\ln\tau\right|^{\alpha}d\tau\right)^{1/2}\cdot$$

Отсюда вытекает неравенство (7), следовательно и неравенство (6). Лемма доказана.

При $h=k_m^{p/2}\cdot\psi$ и $\varphi=\left|\ln|x|\right|^{\alpha/2}$, из неравенства (6) для любой неотрицательной радиальной функции $h\in C_0^1(B_r)$ получим неравенство

$$\left(\int_{B_r}h^{(p/2)q}(x)\varphi^2dx\right)^{2/q}\leq C_2\int_{B_r}\left|\nabla(h^{p/2}(x))\right|^2\varphi^2dx.\tag{8}$$

Поэтому используя нераверство (8) и неравенство Коши, имеем:

$$\left(\int_{B_{r-\delta}}k_m^{(p/2)q}(x)\varphi^2dx\right)^{2/q}\leq\int_{B_r}(k_m\psi)^{pq}(x)\varphi^2dx\leq$$

$$\leq C_2\int_{B_r}\left|\nabla(k_m^{p/2}(x)\psi)\right|^2\varphi^2dx\leq 2C_2\int_{B_r}\left(\left|\nabla(k_m^{p/2}(x))\right|^2\psi^2+k_m^p(x)\left|\nabla\psi\right|^2\right)\varphi^2dx\leq$$

$$\leq 2C_1C_2\delta^{-2}\left(\frac{p^2}{2(p-3/2)}+1\right)\int_{B_r}k_m^p\varphi^2dx\leq\frac{C_3\delta^{-2}p^2}{p-3/2}\int_{B_r}k_m^p(x)\varphi^2dx\ \text{ýa-da}$$

$$\left(\int_{B_{r-\delta}}k_m^{(p/2)q}(x)\varphi^2dx\right)^{2/pq}\leq\left(\frac{C_3\delta^{-2}p^2}{p-3/2}\right)^{1/p}\left(\int_{B_r}k_m^p(x)\varphi^2dx\right)^{1/p}.\tag{9}$$

Пусть $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. Введем обозначения:

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2^j},\ r_1=r,\ r_{j+1}=r_j-\frac{\varepsilon}{2^j},\ p_j=2\cdot q^{j-1},\ j=1,2,\dots.$$

В этих обозначениях неравенство (9) примет вид

$$\left(\int_{B_{r_{j+1}}}k_m^{p_{j+1}}(x)\varphi^2dx\right)^{1/(p_{j+1})}\leq\left(\frac{C_3\cdot2^{2j}p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)^{1/p_j}\left(\int_{B_{r_j}}k_m^{p_j}(x)\varphi^2dx\right)^{1/p_j}.\tag{10}$$

Так как $u_m=k_m\varphi$ и $\int_{B_r}u_m^2dx\leq C^{/}$, $C^{/}>0$, поэтому по индукции получим

$$\left(\int_{B_{r_{j+1}}} k_m^{p_{j+1}}(x)\varphi^2 dx\right)^{1/(p_{j+1})} \le \left(\frac{C_3\cdot 2^{2j}p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)^{1/p_j} \cdots \left(\frac{C_3\times 2^2 p_1^2}{\varepsilon^2(p_1-3/2)}\right)^{1/p_1}\left(\int_{B_r} u_m^2(x)dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{C^{/}}\left(\frac{C_3 p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)^{1/p_j} \cdots \left(\frac{C_3 p_1^2}{\varepsilon^2(p_1-3/2)}\right)^{1/p_1}\cdot 2^{\sum_{i=1}^{j}\frac{2i}{p_i}}. \tag{11}$$

Так как $\alpha_j \sim \mu^{-j}\ln(C\mu^j)$ при $\mu>1$, поэтому сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p_j}\ln\left(\frac{C_3 p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$$

Кроме того, сходится и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2j}{p_j}=\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{j-1}$$

Поэтому для всех $j\ge 1$,имеем

$$\left(\int_{B_{r_j}} k_m^{p_j}(x)\varphi^2 dx\right)^{1/p_j} \le K\ ,$$

причем постоянная $K>0$ не зависит p_j. Поэтому переходя к пределу в неравенстве (11) при $j\to\infty$, получим $\sup k_m(x)\le K$ для почти всех $x\in B$. Это означает, что выполняются неравенства $k_m(x)\le K$ и $u_m(x)\le K\cdot\varphi(x)$ для почти всех $x\in B$. Так как по условию последовательность $\{u_m\}$ не убывает, для почти всех $x\in B$ можем положить

$$k=\lim_{m\to\infty}k_m,\ u=\lim_{m\to\infty}u_m$$

Теперь покажем, что $Vu\in L^1_{loc}(B)$. Зафиксируем точку $x_0\in B$, в которой значение $u(x_0)$ конечно. Тогда для любого $m\ge 1$, и любой компактной подобласти $\Omega\subset\subset B$ из интегрального уравнения для функции $u_m(x)$ будем иметь

$$u_m(x_0)\ge\int_\Omega G(x_0,y)V_m(y)u_m(y)dy\,.$$

Но в силу сильного принципа максимума $G(x_0,y)>0$, поэтому по неравенству Харнака существует постоянная $C_0>0$ такая, что $G(x_0,y)\ge C_0$ в Ω. Поэтому

$$\int_\Omega V_m(y)u_m(y)dy\le C_0^{-1}u_m(x_0)\le C_0^{-1}u(x_0) \tag{12}$$

Это и доказывает включение $Vu\in L^1_{loc}(B)$.

Поскольку u_m – решение задачи (P_m), то для любой функции $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega u_m\Delta\xi dx+\int_\Omega V_m u_m\xi dx=0$$

Отсюда, учитывая неравенство (12) и переходя к пределу при $m\to\infty$, получаем равенство

$$\int_\Omega u\Delta\xi dx+\int_\Omega Vu\xi dx=0$$

которое и доказывает, что $u(x)$ является решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 2. Если $V(x)\ge V_0(x)$ и $\phi(x)\ne 0$, то для любого $\varepsilon>0$ и любой ограниченной подобласти $0\in\Omega_r\subset\subset B$, существует постоянная $C=C(\varepsilon,\Omega_r)>0$ такая, что

$$u(x) \ge C \cdot \left|\ln|x|\right|^{\alpha/2}$$

для почти всех $x \in \Omega_r$.

Доказательство. Пусть $B_0 = B(0, r_0) \subset \Omega' \subset\subset B$ – круг радиуса r_0 с центром в начале координат и υ – решение задачи

$$-\Delta\upsilon = V_0\upsilon\,,\ \upsilon\big|_{\partial B_0} = \phi(x)$$

Здесь υ – предел последовательности $\{u_m\}$ единственных неотрицательных решений задачи

$$-\Delta\upsilon_m = V_m\upsilon_m\,,\ \upsilon_m\big|_{\partial B_0} = \varphi_m\,, \tag{13}$$

где $V_m = \inf\{V_0, m\}$ и $\{\phi_m\} \subset C^1(\overline{B_0})$ – неубывающая последовательность неотрицательных непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к неотрицательной непрерывной граничной функции ϕ. Очевидно,что $u \ge \upsilon \ge \upsilon_m$.

Покажем, что для почти всех $x \in B_0/2 = B_{r_0/2}$ выполняется неравенство.

$$\upsilon(x) \ge Const \cdot \varphi(x) \tag{14}$$

Пусть $g:\ [0,\infty[\to [0,\infty[$ – неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция. Умножим уравнение (13) на $g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2$ и полученное соотношение проинтегрируем по кругу B_0,

$$-\int_{B_0} \Delta\upsilon_m g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2 dx = \int_{B_0} V_m\upsilon_m g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2 dx\,, \tag{15}$$

где $k_m = \upsilon_m/\varphi$ и ψ – срезающая функция для круга B_0. Поскольку

$$-\int_{B_0} \Delta\upsilon_m g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2 dx = \int_{B_0} \nabla(k_m\varphi)\nabla(g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2)dx =$$

$$= \int_{B_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2\psi^2 dx + \int_{B_0} g''(k_m)|\nabla k_m|^2 g(k_m)\varphi^2\psi^2 dx +$$

$$+\int_{B_0} \nabla g(k_m)g(k_m)\varphi^2\nabla\psi^2 dx + \int_{B_0} g'(k_m)g(k_m)k_m\varphi\psi^2(-\Delta\varphi)dx\,,$$

то равенство (15) примет вид:

$$\int_{B_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2\psi^2 dx + \int_{B_0} g''(k_m)|\nabla k_m|^2 g(k_m)\varphi^2\psi^2 dx +$$

$$+\int_{B_0} \nabla g(k_m)g(k_m)\varphi^2\nabla\psi^2 dx = \int_{B_0} (\Delta\phi + V_m\varphi)g'(k_m)g(k_m)k_m\varphi\psi^2 dx\,.$$

Второй член в левой части последнего равенства неотрицателен, так как функция g выпукла и неотрицательна, а для оценки третьего члена используем неравенство Коши

$$2\left|\int_{B_0} \nabla g(k_m)g(k_m)\varphi^2\psi\nabla\psi\, dx\right| \le \frac{1}{2}\int_{B_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2\psi^2 dx + 2\int_{B_0} g^2(k_m)\varphi^2|\nabla\psi|^2 dx\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int_{B_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2\psi^2 dx \le 2\int_{B_0} g^2(k_m)\varphi^2|\nabla\psi|^2 dx +$$

$$+\int_{B_0} (\Delta\phi + V_m\varphi)g'(k_m)g(k_m)k_m\varphi\psi^2 dx\,.$$

Пусть $B_r = B(0, r)$ – круг достаточно малого радиуса. Так как по предположению функция g выпукла и неотрицательна, $V_m \le V_0 = -\Delta\varphi/\varphi$ и норма $\|k_m\|_\infty$ ограничена, то по теореме

Лебега о предельном переходе под знаком интеграла второй член в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство

$$\int_{B_r} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \le 4 \int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx . \tag{16}$$

Выберем функцию $\psi(x)$ следующим образом: $0 \le \psi(x) \le 1$, $\psi = 1$ при $x \in B_{r-\delta}$ ($\delta > 0$) и $\psi = 0$ при $x \in B_0 \setminus B_r$. Предположим, что $|\nabla \psi|^2 \le C_4 \delta^{-2}$, где постоянная $C_4 > 0$ не зависит от δ. Тогда неравенство (16) примет вид

$$\int_{B_{r-\delta}} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 dx \le \frac{4C_4}{\delta^2} \int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx . \tag{17}$$

Теперь воспользуемся неравенством (6). Определим число β равенством $\beta + 2/q = 1$, где $q > 2.$. Используя неравенство Гёльдера и неравенство (6) для неотрицательной радиальной функции h, имеем

$$\int_{B_r} h^{2+2\beta} \varphi^2 dx \le \left(\int_{B_r} h^q \varphi^2 dx \right)^{2/q} \left(\int_{B_r} h^2 \varphi^2 dx \right)^{\beta} \le$$

$$\le C_5 \left(\int_{B_r} |\nabla h|^2 \varphi^2 dx + \int_{B_r} h^2 \varphi^2 dx \right) \cdot \left(\int_{B_r} h^2 \varphi^2 dx \right)^{\beta} . \tag{18}$$

В неравенстве (18) заменяя h на $g(k)$ и B_r на $B_{r-\delta}$, приходим к неравенству

$$\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \le C_5 \left(\int_{B_{r-\delta}} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 dx + \int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right) \cdot \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{\beta} ,$$

Отсюда используя неравенство (17), последнего неравенства можно записать в виде

$$\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \le C_5 (4C_4 \delta^{-2} + 1) \int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \cdot \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{\beta} =$$

$$= C_5 (4C_4 \delta^{-2} + 1) \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1+\beta} \le C_6 \delta^{-2} \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1+\beta} ,$$

или

$$\left(\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \right)^{1/(2+2\beta)} \le (C_6 \delta^{-2})^{1/(2+2\beta)} \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le C_7 \delta^{-1/(1+\beta)} \left(\int_{B_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2} \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Введем обозначения:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^j},\ r_1 = r,\ r_{j+1} = r_j - \frac{\varepsilon}{2^j},\ g_{j+1} = g_j^{1+\beta},\ H_j = \left(\int_{B_{r_j}} g_j^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2},\ j = 1, 2, \ldots ,$$

и $g_1 = g$. В этих обозначениях неравенство (19) примет вид

$$H_{j+1}^{1/(1+\beta)} \le C_7 \cdot 2^j \varepsilon^{-1} H_j ,$$

откуда по индукции получаем неравенство

$$H_j^{1/(1+\beta)} \le (C_7\varepsilon^{-1})^{\alpha_j} \cdot 2^{\gamma_j} \cdot H_1^{(1+\beta)^{j-2}} ,$$

где

$$\alpha_j = (1+\beta)^{j-2} \sum_{\nu=0}^{j-2} (1+\beta)^{-\nu} \text{ we } \gamma_j = \sum_{\nu=0}^{j-2} (1+\nu)(1+\beta)^{j-2-\nu} .$$

Так как $g_j = g^{(1+\beta)^{j-1}}$, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, будем иметь

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} g(k(x)) \le (C_7\varepsilon^{-1} \cdot 2^{(1+\beta)/\beta})^{(1+\beta)/\beta} \left(\int_{B_r} g_j^2(k)\varphi^2 dx \right)^{1/2} .$$

Заменим g последовательностью $\{g_l\}$, где g_l – те же, что и g and $g_l(k) \to k^{-\gamma}$ при $l \to \infty$. Тогда

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \le (C_7\varepsilon^{-1} \cdot 2^{(1+\beta)/\beta})^{(1+\beta)/\beta} \left(\int_{B_r} k^{-2\gamma}\varphi^2 dx \right)^{1/2} .$$

Так как при $r < r_0$ для почти всех $x \in B_r$ выполняется неравенство

$$k(x) = \upsilon(x)/\varphi(x) \ge C_8 \cdot \varphi^{-1}(x)$$

то

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \le C_9 \varepsilon^{-1-1/\beta} \cdot \left(\int_{B_r} \varphi^{2+2\gamma} dx \right)^{1/2} .$$

Отсюда следует, что

$$k(x) \ge C_{10} \varepsilon^{(1+1/\beta)/\gamma} \cdot \left(\int_{B_r} \varphi^{2+2\gamma} dx \right)^{-1/2\gamma} \qquad (20)$$

для почти всех $x \in B_{r-\varepsilon}$ где постоянная $C_{10} > 0$ не зависит от r и ε. Неравенство (14) доказано. Теорема доказана.

Теорема 3. Если $c > 1$ и $V(x) \ge V_0(x)$ в круге B, то при $\phi > 0$ задача (1), (2) не имеет неотрицательных решений.

Доказательство. Пусть $c > 1$ и $\phi > 0$. Если задача (1),(2) имеет решение, то оно удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u = \frac{1}{4|x|^2 \ln^2|x|} u + \frac{c-1}{4|x|^2 \ln^2|x|} u$$

в пространстве $D'(B)$. Умножив это уравнение на $\left|\ln|x|\right|^{1/2}$ и проинтегрировав по кругу B, получим равенство

$$-\int_B \Delta u \cdot \left|\ln|x|\right|^{1/2} dx = \frac{1}{4}\int_B |x|^{-2} \left|\ln|x|\right|^{-3/2} u(x)dx + \frac{c-1}{4}\int_B |x|^{-2} \left|\ln|x|\right|^{-3/2} u(x)dx .$$

Но из теоремы 2 следует, что для любой ограниченной области Ω_r такой, что $0 \in \Omega_r \subset\subset B$ существует постоянная $C = C(\varepsilon, \Omega_r) > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$u(x) \geq C \cdot \left|\ln|x|\right|^{1/2}$$

для почти всех $x \in \Omega_r$. Поэтому

$$\int_{\Omega_r} u(x) \cdot |x|^{-2} \left|\ln|x|\right|^{-3/2} dx \geq Const \cdot \int_{\Omega_r} |x|^{-2} \left|\ln|x|\right|^{-1} dx = \infty .$$

Это означает, что $V_0 u \notin L^1_{loc}(B)$. Поскольку по условию $V(x) \geq V_0(x)$ то и $Vu \notin L^1_{loc}(B)$. Это и означает, что при $c > 1$ и $V(x) \geq V_0(x)$ задача (1), (2) не имеет неотрицательных решений. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Худайгулыев Б.А.* Эллиптическое уравнение с сингулярным потенциалом // Украинский математичный журнал. – 2010. – Т. 62. – № 12. – С. 1715-1723.
2. *Hudaykuliev B.* Elliptic Equation with a Singular Potential in a domain with a conic point // Mathematical notes. – 2012. – V.48:2 – P. 255-263.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М. Наука. – 1973.