ЗАДАЧА О СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ*

Гарягды Чопанов,
старший преподаватель кафедры Наука и технологии
Академии наук Туркменистана, кандидат физико-математических наук

Аннотация

В работе рассматривается задача моделирования свободной конвекции в прямоугольнике. Приводятся результаты вычислений интегрального числа Нуссельта при разных значениях числа Грасгофа и отношений сторон прямоугольника. Также уточнены, что при малых ошибках в процессе вычисления поля скоростей приводят к заметным отклонениям решения от стационарного значения и при использовании стационарного решателя итерационный процесс не сходиться. Поэтому при вычислении свободной конвекции для больших значений числа Грасгофа, даже при стационарной постановке, необходимо использование нестационарного решателя.

Ключевые слова: число Грасгофа, число Нуссельта, свободная конвекция, COMSOL Multiphysics.

В статье рассматривается задача моделирования свободной конвекции в прямоугольнике. Свободная конвекция жидкостей очень важна в геофизике в котором благодаря разнице плотности происходит движение жидкостей, например, на побережье и озерах. В примере, приводимом ниже, свободная конвекция жидкости происходит из-за разности плотностей, которая возникает благодаря вариациям температуры, от которой зависит плотность.

На рис. 1. изображена геометрия модели. Будем рассматривать стационарную свободную конвекцию в прямоугольной области шириной L и высотой H. В рамках такой постановки поле течения и перенос тепла в рассматриваемой области описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска (В.И.Полежаев, А.В.Бунэ, Н.А.Верзуб, Г.С.Глушко, В.Л.Грязнов, К.Г.Дубовик, С.А.Никитин, А.И.Простомолотов, А.И.Федосеев, С.Г.Черкасов, 1987):

$$\rho\left(\mathbf{u}\nabla\right)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{g}\beta\left(T - T_0\right). \tag{1}$$

$$\nabla\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

$$\rho C_p\mathbf{u}\nabla T - \nabla\left(k\nabla T\right) = 0. \tag{3}$$

здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u, v)$ – поле скоростей, $p(x,y)$ – давление, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, k – коэффициент теплопроводности, T_0 – характерная температура, ρ_0 – плотность жидкости при температуре T_0, β – коэффициент теплового расширения.

Для однозначного решения задачи помимо уравнений нужно задавать граничные условия. Для уравнения Навье-Стокса на границе ставится условие прилипания (т.е. обо компоненти скорости обращается в нуль) и задается давление в левом нижнем углу ($p=p_0$). Что касается к граничным условиям для температуры то считаются, что на вертикальных сторонах прямоугольника поддерживаются постоянные температуры ($T=T_0$ на левой и $T=T_1$ на правой стороне), а горизонтальные стороны теплоизолированы.

Для рассматриваемой задачи относительная вариация температуры $|T-T_0|/(T_1+T_0)<<1$ так, что коэффициенты уравнений (которые, вообще говоря зависят от температуры) можно считат постоянными: $\rho = \rho_0$, η = const, k = const, C_p = const.

---

* Чопанов Г.А. e-mail: chopanow57@gmail.com

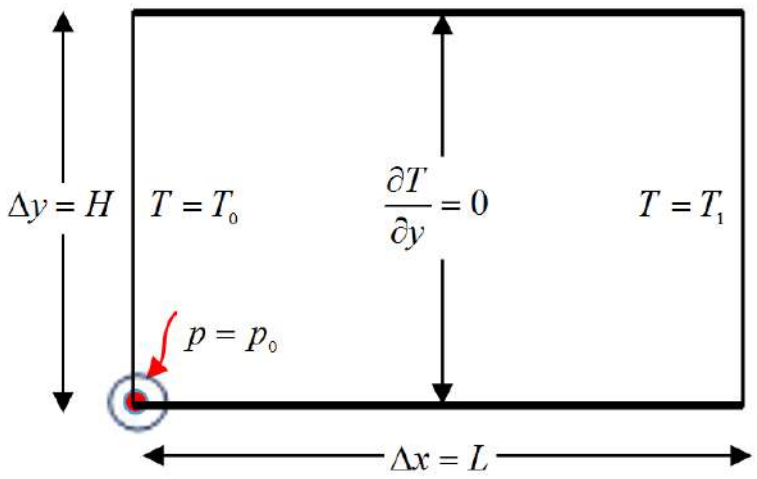

Рис. 1. Геометрия задачи о свободной конвекции в прямоугольнике

Перейдем к постановке задачи в безразмерных переменных:

$$x' = \frac{x}{L};\ y' = \frac{y}{L};\ u' = \frac{u}{U};\ v' = \frac{v}{U};\ p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 U^2};\ T' = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}.$$

здесь: $U = \dfrac{\eta}{\rho_0 L}$ – величина, имеющая размерность скорости (m/s).

Здесь и далее полагаем, $T_0 > T_1$ т.е. левая сторона горячее, чем правая. Тогда система уравнений, которая описывает рассматриваемый процесс, будет иметь вид:

$$(\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{u}' = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}' + \mathbf{e}_y \mathrm{Gr} \cdot \mathrm{T}', \tag{4}$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{u}'\nabla \cdot T' = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \nabla^2 T', \tag{6}$$

здесь: $\mathbf{e}_y$=(0,1) – единичный вектор, направленный вдоль оси *Oy,* $\mathrm{Gr} = \mathrm{g}\,\beta\,(T_0 - T_1)\,L^3 \rho^2 / \eta^2$ – число Грасгофа, $\mathrm{Pr} = \eta\,\rho_0 C_p / (\rho\,k)$ – число Прандтля (безразмерные величины).

Геометрия задачи и граничные условия изображены на рисунке 2. Здесь $A = H/L$ – отношение длины сторон исходного прямоугольника.

Как видно из уравнении (4), с ростом числа Грасгофа вязкие члены становятся менее значимы за исключением вблизи границы, где происходят большие перепады зависимых переменных. Поэтому очень важно подобрать правильную стратегию выбора сетки: внутри области она может быть достаточно грубой, но должна сгущаться при приближении к границе. Еще одним немаловажным аспектом правильного решения поставленной задачи является удачный выбор начального приближения. Этот вопрос успешно решается с выбором параметрического решателя по числу Грасгофа. При этом число Прандтля остается постоянным.

Мы будем считать Pr=0,7 (что соответствует воздуху при нормальной температуре), а число Грасгофа будем брать в диапазоне $10^3 \le \mathrm{Gr} \le 10^6$. Заметим, что число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{|\mathbf{u}|\,L\rho}{\eta} = |\mathbf{u}'|,$$

что позволяет проследить режим течения (Re<2100 – ламинарное, Re>2100 – турбулентное течение).

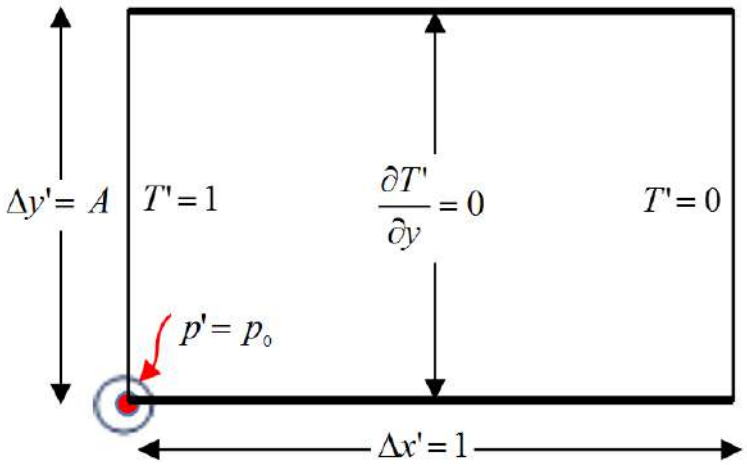

Рис. 2. Геометрия задачи в безразмерных переменных

Задача решена в COMSOL Multiphysics (Г. Е. Красников, О. В. Нагорнов, Н. В. Старостин, 2012). На рис. 3-5 приводятся результаты расчета свободной конвекции внутри прямоугольника при различных значениях числа Грасгофа. При этом A=1, число Прандтля Pr=0,7. Температурное поле изображено цветным графиком (*surface plot*), поля скоростей стрелками (*arrows*), а линии (*contours*) соответствуют линиям уровня абсолютной безразмерной скорости $|\mathbf{u}'|$=Re. Максимальное и минимальное значения $|\mathbf{u}'|$ расположены на самом верху и самом внизу самой правой колонки рисунка. Например, при Gr=10^8, как это видно из рис. 5, Re_{max}=2587,27.

Из этих рисунков видно, что в случаях представленных на рис. 3-4 поле течения ламинарное а в случае на рис. 5 турбулентное (поскольку в последнем случае максимальное значение абсолютной безразмерной скорости, которая равна числу Рейнолдса, превосходит критическое значение равное 2100).

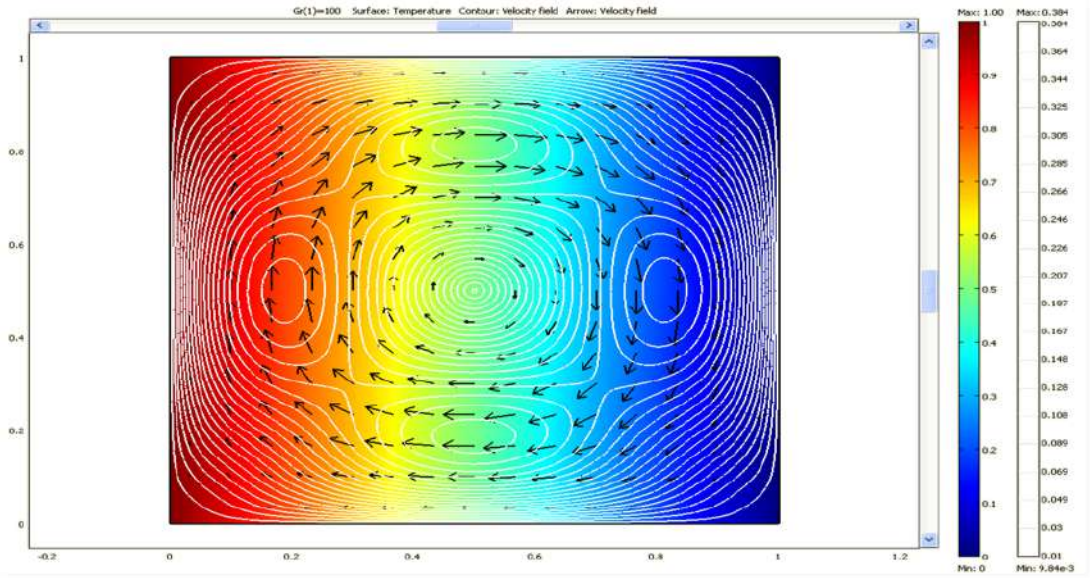

Рис. 3. Gr=10^2:
Цветное изображение – температурное поле, стрелки – поля скоростей, контурные линии – изолинии абсолютной безразмерной скорости $|u'|$

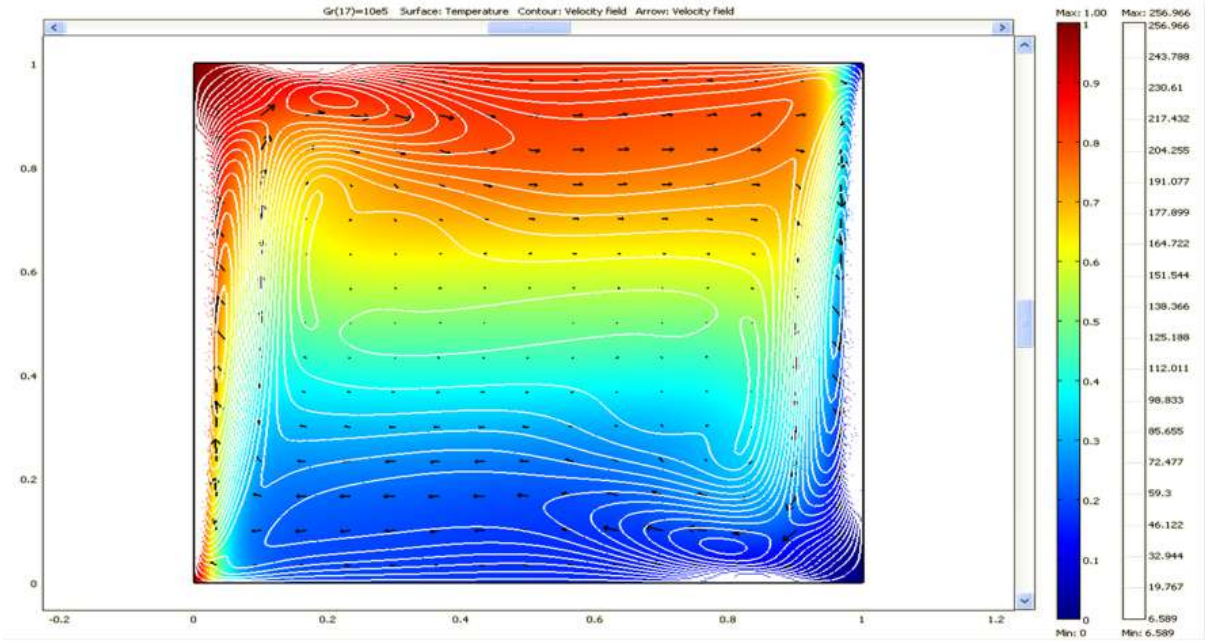

Рис. 4. Безразмерные решения для значения числа Грасгофа Gr=10^6

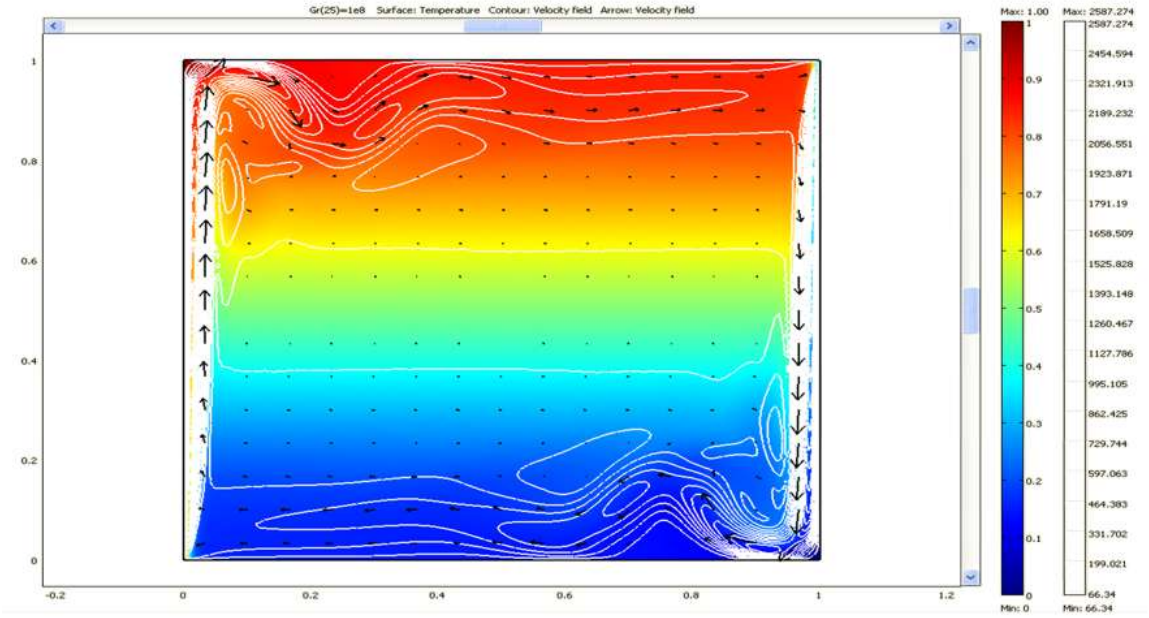

Рис. 5. Безразмерные решения для значения числа Грасгофа Gr=10^8

Одним из важных теплофизических зависимостей является зависимость интегрального числа Нуссельта от числа Грасгофа:

$$\mathrm{Nu} = \frac{QL}{k\left(T_0 T_1\right)} = f(\mathrm{Gr}).$$

здесь: $Q = \frac{1}{H}\int_0^H \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}(0,y)\right)dy$ – средний поток тепла в горизонтальном направлении, приходящиеся на единичную длину вертикальных сторон. Из равенства

$$Q = \frac{1}{\mathrm{H}}\int_0^H \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}(0,y)\right)dy = \frac{k(T_0 - T_1)}{L}\cdot\frac{1}{A}\int_0^A \left(-\frac{\partial T'}{\partial x'}(0,y')\right)dy'$$

следует

$$\mathrm{Nu} = \frac{QL}{k(T_0 - T_1)} = \frac{1}{A}\int_0^A \left(-\frac{\partial T'}{\partial x'}(0,y')\right)dy' \qquad (7)$$

Таким образом, интересующая нас величина Nu является интегралом по левой стороне прямоугольника. Приведем теперь последовательность построения графика зависимости Nu=*f*(Gr).

Применяем результат Gr=10^8, полученный в COMSOL Multiphysics. В окне *Postprocessing> Boundary Integration* из пункта *Boundary selection* выбираем границу 1, а из пункта *Predefined quantities – Convection and Conduction in Porous Media (eshcc) > Normal total heat flux*. Затем, появившееся в поле Expression выражение «*ntflux_eshcc*» редактируем в виде «*-Pr*ntflux_eshcc*».

В COMSOL Multiphysics для данного приложения под выражением «*ntflux_eshcc*» подразумевается полный тепловой поток в нормальном к границе направлении. В данном случае:

$$\mathrm{ntflux_eshcc} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\cdot\frac{\partial T'}{\partial x'}.$$

Для получения Nu по формуле (7), мы должны интегрировать на границе выражение «*-Pr*ntflux_eshcc*». Если рассматривамая область не квадратная ($A \neq 1$), то применяется выражение «*-(Pr/A)*ntflux_eshcc*». При этом параметр *A* должна заблаговременно (т.е. перед тем как будет проведен расчет задачи) быть занесен в список констант.

На рис. 6 приведена зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа. После она обработана на языке MATLAB. На рис. 7 приведены сравнения данного результата («—») с результатами, полученными авторами в работе (M. H. Aşyrbaýew, O. A. Gurbanmyradow, G. A. Çopanow, 2009) («---»).

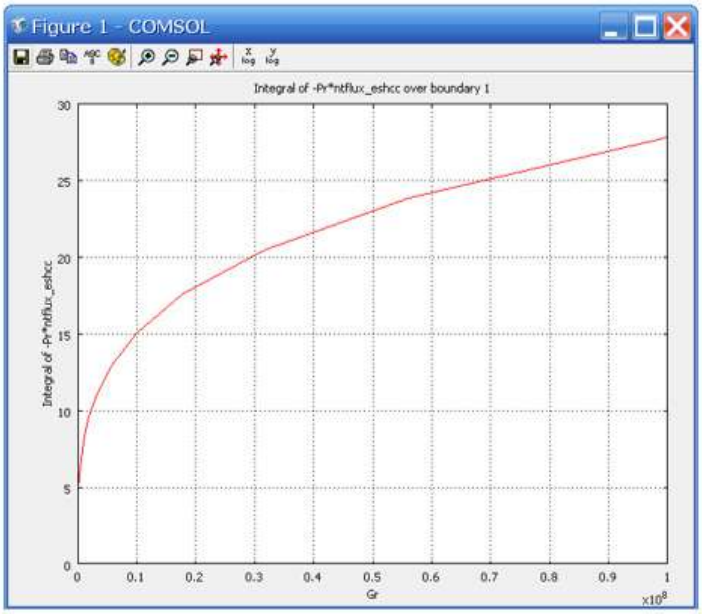

Рис. 6. Зависимость числа Нусселта от числа Грасгофа

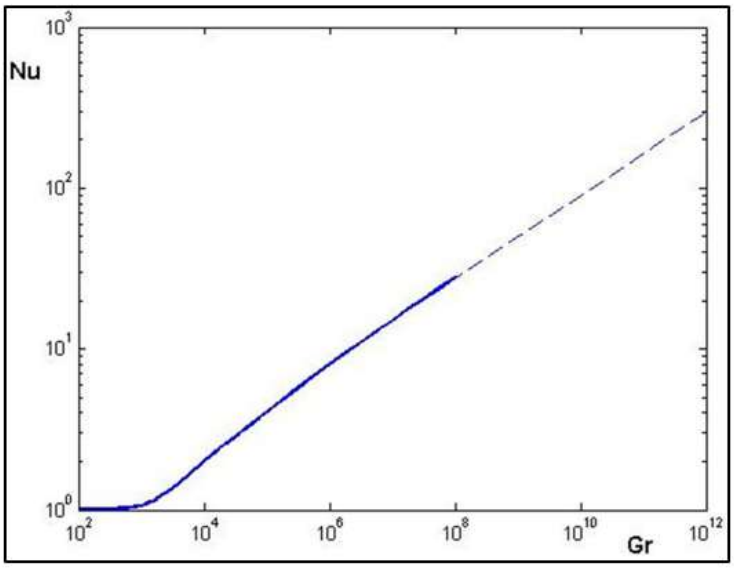

Рис. 7. Зависимость числа Нусселта от числа Грасгофа при *A*=1

Сравнение результатов, полученных в COMSOL Multiphysics, в двух работах при *A*=4 значение отношенийи длин сторон приводиться на рис. 8. В этом случае, в отличие от случая *A*=1 в рамках стационарной постановки, устойчивый расчет удается провести лишь при $Gr \leq 9 \cdot 10^6$. Действительно, на рис. 8 изображено распределение абсолютной безразмерной скорости, т.е. числа Рейнольдса) при *A*=4 и $Gr=5{,}62 \cdot 10^6$

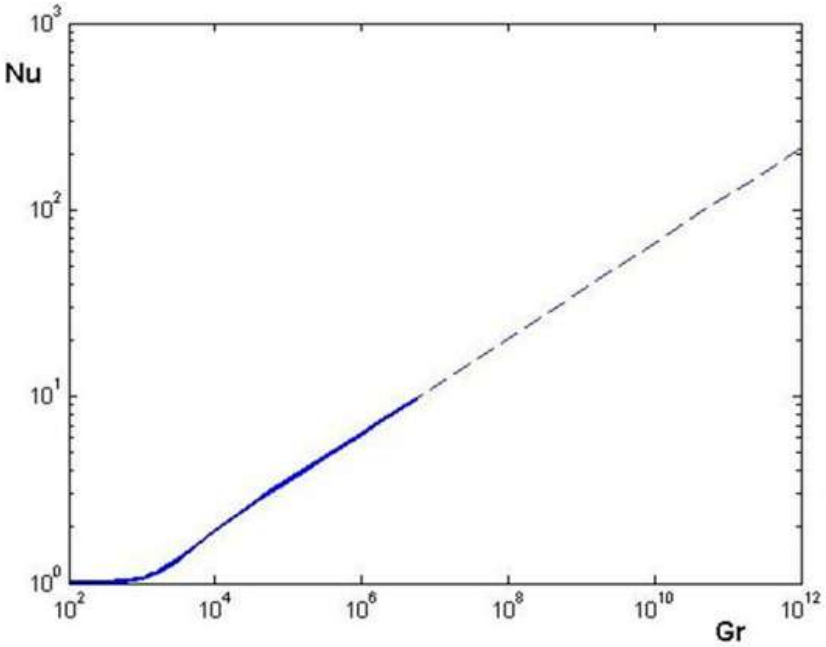

Рис. 8. Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа при *A*=4

Из этого результата следует, что максимальное значение числа Рейнольдса при заданном значении параметров *A* и Gr равняется 1251.9. Это число базировалось на ширине прямоугольника, но, как видно из рисунков 3-4 и 9, максимальные скорости течения воздуха

происходят вдоль вертикальных сторон. Поэтому с физической точки зрения более корректно рассмотрение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_H = \dfrac{|\mathbf{u}|H\rho}{\eta} = A \cdot \mathrm{Re}$, базирующееся на длину вертикальной стороны, которая A раз превосходит число Рейнольдса, базирующего на ширине. Таким образом, максимальное значение числа, Re_H равняется 5007,6, что говорит о том, что поле течения турбулентное.

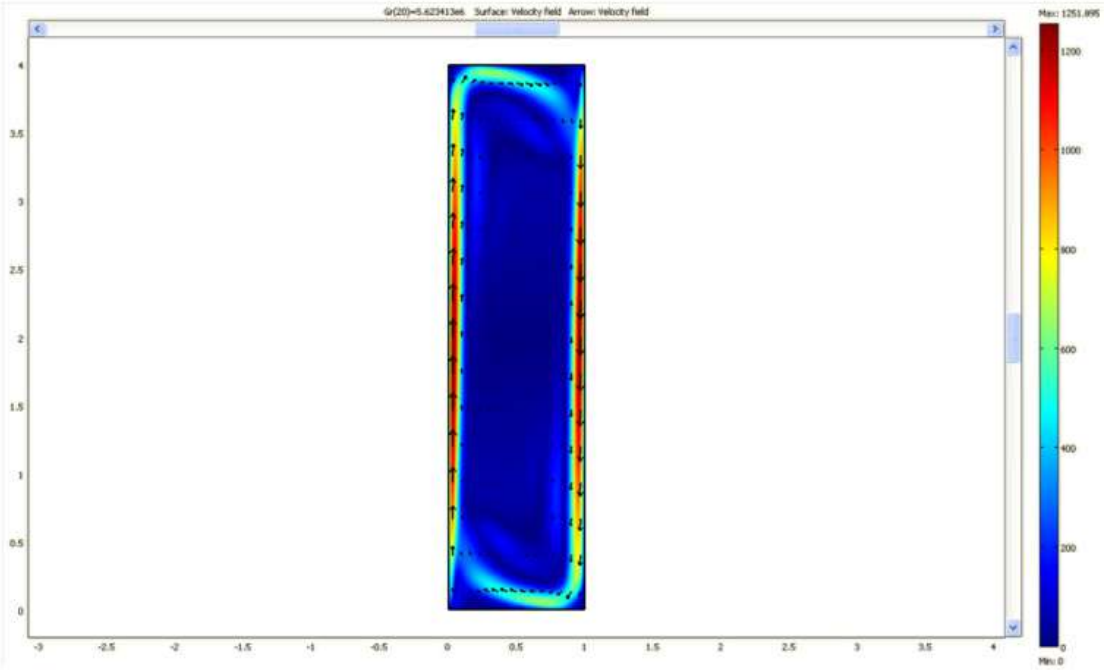

Рис. 9. Изображение абсолютного значения |u'| (*surface plot*) и вектора u' (*arrow*) безразмерной скорости при *A*=4 и Gr=5,62·10⁶

В силу сказанного, малые ошибки в процессе вычисления поля скоростей приводят к заметным отклонениям решения от стационарного значения. Поэтому при использовании стационарного решателя итерационный процесс не сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aşyrbaýew M.H., Gurbanmyradow O.A., Çopanow G.A. Gönüburçlukda erkin konwektiw ýylylyk çalşygynyň Nawýe-Stoksuň iki ölçegli deňlemesiniň çäklerindäki derňewi. HTTU. Türkmen ylmy galkynyş we halkara gatnaşyklar ýolunda (Ylmy makalalar ýygyndysy – 2). – Aşgabat: Ylym, 2009. 186-206 sah.
2. Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics: Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 184 с.
3. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верзуб Н.А. и другие. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье – Стокса. – М.: Наука 1987, 273 с.